2016학년도 대학수학능력시험

수학영역 B형 정답 및 풀이

01. ①	02. ③	03. ④	04. ⑤	05. ④
06. ②	07. ⑤	08. ①	09. ③	10. ②
11. ④	12. ②	13. ②	14. ③	15. ①
16. ③	17. ④	18. ①	19. ⑤	20. ⑤
21. ④	22. 3	23. 28	24. 80	25. 4
26. 104	27. 15	28. 30	29. 50	30. 35

1. **출제의도** : 행렬의 덧셈을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$A+B=\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a+4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

이때, 행렬 $A+B$의 모든 성분의 합이 9이므로

$a+8=9$

$\therefore\ a=1$

정답 ①

2. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+5x)}{5x}\times\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{5}{3}\right\}$$
$$=\frac{5}{3}\times\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{5x}\times\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}$$
$$=\frac{5}{3}\times 1\times 1$$
$$=\frac{5}{3}$$

정답 ③

3. **출제의도** : 공간좌표를 이용하여 삼각형의 무게중심의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

세 점 $\mathrm{A}(a, 0, 5)$, $\mathrm{B}(1, b, -3)$, $\mathrm{C}(1, 1, 1)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+1+1}{3}, \frac{0+b+1}{3}, \frac{5+(-3)+1}{3}\right)$$
$$\therefore\ \left(\frac{a+2}{3}, \frac{b+1}{3}, 1\right)$$

이때, 무게중심의 좌표가 $(2, 2, 1)$이므로

$$\frac{a+2}{3}=2,\ \frac{b+1}{3}=2$$

$\therefore\ a=4,\ b=5$

$\therefore\ a+b=9$

정답 ④

4. **출제의도** : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^e \frac{5}{x+e}dx$$
$$=\left[5\ln(x+e)\right]_0^e$$
$$=5\ln 2e-5\ln e$$
$$=5\ln 2$$

정답 ⑤

5. 출제의도 : 확률의 성질을 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{P}(A^c)=\frac{1}{4}$에서

$1-\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$

또, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}$에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

그리고, 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^c, B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A^c)=\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

정답 ④

6. 출제의도 : 일차변환에 의하여 한 점이 이동한 점의 좌표를 구하고 직선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -5\end{pmatrix}$이므로 주어진 일차변환에 의하여 점 $\mathrm{P}(2,-1)$이 옮겨진 점 Q의 좌표는 $(0,-5)$이다.

따라서 직선 PQ의 기울기는

$\frac{-5+1}{0-2}=2$

이다.

정답 ②

7. 출제의도 : 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=3e^{x-1}$ 위의 점 A의 좌표를 $(a,\ 3e^{a-1})$으로 놓으면 $y'=3e^{x-1}$이므로 접선의 기울기는 $3e^{a-1}$이다.

그러므로 접선의 방정식은

$y=3e^{a-1}(x-a)+3e^{a-1}$

이 접선이 원점 $\mathrm{O}(0,0)$을 지나므로

$0=3e^{a-1}(-a)+3e^{a-1}$

$\therefore\ a=1$

따라서, $\mathrm{A}(1,3)$이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

정답 ⑤

8. 출제의도 : 독립시행의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

한 개의 동전을 5번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 a, 뒷면이 나오는 횟수를 b라고 하자.

이때 $a\cdot b=6$인 경우와 확률은 다음과 같다.

(i) $a=2,\ b=3$ 일 때,

${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

(ii) $a=3,\ b=2$ 일 때,

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$

그러므로 구하는 확률은

$\frac{5}{16}+\frac{5}{16}=\frac{5}{8}$

정답 ①

9. 출제의도 : 포물선의 접선의 방정식을 구하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{A}(4, 4)$에서의 접선의 방정식은

$$4y=2(x+4)$$

$$y=\frac{1}{2}x+2 \qquad ---㉠$$

이때, 포물선의 준선의 방정식은 $x=-1$이므로

$$\mathrm{D}(-1, 0)$$

또, ㉠에 $x=-1$을 대입하면

$$\mathrm{B}\left(-1, \frac{3}{2}\right)$$

또, ㉠에 $y=0$을 대입하면

$$\mathrm{C}(-4, 0)$$

따라서, 삼각형 BCD의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{BD}}$$

$$=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3}{2}$$

$$=\frac{9}{4}$$

정답 ④

10. 출제의도 : 실생활 문제에 지수방정식을 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{W}{W_0}=\frac{1}{2}\times10^{at}\left(1+10^{at}\right)$$

$3=\frac{1}{2}\times10^{15a}\left(1+10^{15a}\right)$에서

$$\left(10^{15a}\right)^2+10^{15a}-6=0$$

$$\left(10^{15a}+3\right)\left(10^{15a}-2\right)=0$$

$10^{15a}>0$이므로 $10^{15a}=2$

$$\therefore\ k=\frac{1}{2}\times10^{30a}\left(1+10^{30a}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times4\times(1+4)=10$$

정답 ②

11. 출제의도 : 회전체의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

닫힌 구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 V라 하면

$$V=\pi\int_0^1\{f(x)\}^2dx$$

$$=\pi\int_0^1 25x^2(x-2)^2dx$$

$$=25\pi\int_0^1(x^4-4x^3+4x^2)dx$$

$$=25\pi\left[\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{40}{3}\pi$$

정답 ④

12. 출제의도 : 함수의 그래프를 이용하여 무리방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$\sqrt{4-f(x)}=1-x$의 양변을 각각 제곱하면

$$4-f(x)=(1-x)^2$$

$\therefore\ f(x)=4-(1-x)^2$ (단, $x\le1$)

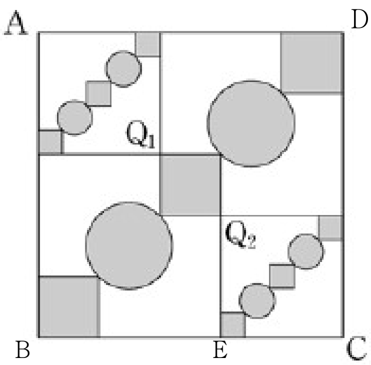
이때 함수 $f(x)$의 그래프와 곡선 $y=-(x-1)^2+4$가 $x\le1$의 범위에서 만

나는 서로 다른 점의 개수는 2이므로 구하는 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

정답 ②

13. 출제의도 : 무한등비급수를 이용하여 반복되는 도형에서 넓이의 합에 대한 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$\overline{BE} : \overline{EC} = 3:2$ 이므로 닮음비는 $\frac{2}{5}$이다. 따라서 넓이의 비는 $(\frac{2}{5})^2 = \frac{4}{25}$이고 도형의 개수는 2배씩 늘어나므로 무한등비급수의 공비는

$$\frac{4}{25} \times 2 = \frac{8}{25}$$

또한, 그림 R_1에서 $\overline{BD} = 5\sqrt{2}$ 이므로

$$S_1 = 3\times 1 + 2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\pi$$

$$= 3 + \pi$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3+\pi}{1-\frac{8}{25}}$$

$$= \frac{25}{17}(\pi + 3)$$

정답 ②

14. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 조건을 만족시키는 세 자연수 $|a|$, $|b|$, $|c|$의 순서쌍 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수는 5 이하의 자연수 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

이때 a, b, c는 각각 음의 정수와 양의 정수의 값을 가질 수 있으므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수의 2^3배와 같다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$${}_5\mathrm{H}_3 \times 2^3$$
$$= {}_{5+3-1}\mathrm{C}_3 \times 8$$
$$= {}_7\mathrm{C}_3 \times 8$$
$$= \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1} \times 8$$
$$= 280$$

정답 ③

15. 출제의도 : 삼각함수의 합성을 이용하여 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

사각형 OACB가 평행사변형이므로

$$f(\theta) = 2 \times \triangle\mathrm{OAB}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OB}} \times \sin\theta$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \times \sin\theta$$

$$= \sin\theta$$

또, 평행사변형 OACB의 대각선의 중점은 일치하므로 C의 좌표를 (a, b)라 하면

$$\left(\frac{\cos\theta + 1}{2}, \frac{\sin\theta}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

$$\therefore\ a = \cos\theta + 1,\ b = \sin\theta$$

$\therefore$ $\mathrm{C}(\cos\theta+1, \sin\theta)$

그러므로

$g(\theta)=\overline{\mathrm{OC}}^2$

$=(\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta$

$=2+2\cos\theta$

그러므로

$f(\theta)+g(\theta)=\sin\theta+(2+2\cos\theta)$

$=2\cos\theta+\sin\theta+2$

$$=\sqrt{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\theta+\frac{\sqrt{5}}{5}\sin\theta\right)+2$$

$=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)+2$

(단, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$)

따라서, $f(\theta)+g(\theta)$의 최댓값은

$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 즉, $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$일 때,

$\sqrt{5}+2$을 갖는다.

정답 ①

16. **출제의도** : 행렬의 성질을 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $A+B=BABA$이고,

$ABA=B+E$에서 $BABA=B^2+B$

이므로 $A+B=B^2+B$

에서 $A=B^2$ (참)

ㄴ. $ABA=B+E$에서 $B^2BB^2=B+E$

이므로 $(B^4-E)B=E$

$(A^2-E)B=E$

$\therefore$ $B^{-1}=A^2-E$ (거짓)

ㄷ. ㄱ에서 $A=B^2$이므로

$A+B=(BA)^2$에서 $A+B=B^6$이고,

$A+B=(B^2)^3=A^3$

$ABA=B+E$에서 $B^5=B+E$

또한, $A^3=A+B$의 양변에 A^2을 곱하면

$A^5=A^3+A^2B$

$=A+B+A^2B$

$=A+B+B^5$

이므로 $A^5-B^5=A+B$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ③

17. **출제의도** : 수열의 일반항을 구하는 과정을 이해할 수 있는가?

정답풀이 :

$b_1=2$ 이고 $b_n=b_{n-1}+2n$ $(n\geq 2)$이다.

수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구해보면

$b_n-b_{n-1}=2n$

에서

$b_2-b_1=2\times 2$

$b_3-b_2=2\times 3$

$\cdots$

$b_n-b_{n-1}=2n$

이므로 좌변은 좌변끼리 우변은 우변끼리 모두 더하면

$b_n-b_1=2(2+3+\cdots+n)$

$\therefore$ $b_n=b_1+2(2+3+\cdots+n)$

$=2+2(2+3+\cdots+n)$

$=2(1+2+3+\cdots+n)$

$=2\times\dfrac{n(n+1)}{2}=\boxed{n}(n+1)$

따라서, $b_n=\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$ 이므로

$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=n(n+1)$

에서

$$\frac{S_2}{S_1}=1\times 2$$

$$\frac{S_3}{S_2}=2\times 3$$

$\cdots$

$$\frac{S_n}{S_{n-1}}=(n-1)n$$

이고 좌변은 좌변끼리 우변은 우변끼리 모두 곱하면

$$\frac{S_n}{S_1}=1\times 2^2\times 3^2\times\cdots\times(n-1)^2\times n$$

$$\therefore\ S_n=\boxed{n}\times\{(n-1)!\}^2$$

따라서, $a_1=1$ 이고 $n\geq\ 2$일 때

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=n\times\{(n-1)!\}^2-(n-1)\times\{(n-2)!\}^2\\&=\{n(n-1)^2-(n-1)\}\times\{(n-2)!\}^2\\&=\boxed{(n-1)(n^2-n-1)}\times\{(n-2)!\}^2\end{aligned}$$

$\therefore\ f(n)=n,\ g(n)=(n-1)(n^2-n-1)$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(10)+g(6)&=10+5\times 29\\&=10+145=155\end{aligned}$$

정답 ④

18. 출제의도 : 표본평균의 분포를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

정규분포 $\mathrm{N}(50, 8^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 표본의 크기가 16인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(50, \left(\frac{8}{\sqrt{16}}\right)^2\right)$

즉, $\mathrm{N}(50, 2^2)$을 따른다.

또, 정규분포 $\mathrm{N}(75, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 표본의 크기가 25인 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(75, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{25}}\right)^2\right)$ 즉, $\mathrm{N}\left(75, \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

이때

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(\overline{X}\leq\ 53)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-50}{2}\leq\frac{53-50}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\leq\ 1.5)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\leq\ Z\leq\ 1.5)\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(\overline{Y}\leq\ 69)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{Y}-75}{\frac{\sigma}{5}}\leq\frac{69-75}{\frac{\sigma}{5}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\leq -\frac{30}{\sigma}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\leq\ Z\leq\frac{30}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

이다.

이때 $\mathrm{P}(\overline{X}\leq\ 53)+\mathrm{P}(\overline{Y}\leq\ 69)=1$이므로

$$\mathrm{P}(0\leq\ Z\leq\ 1.5)=\mathrm{P}\left(0\leq\ Z\leq\frac{30}{\sigma}\right)$$

즉, $1.5=\frac{30}{\sigma}$이어야 한다.

$\therefore\ \sigma=20$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(\overline{Y}\geq\ 71)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{Y}-75}{4}\geq\frac{71-75}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq -1)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\leq\ Z\leq\ 1)\\&=0.5+0.3413\\&=0.8413\end{aligned}$$

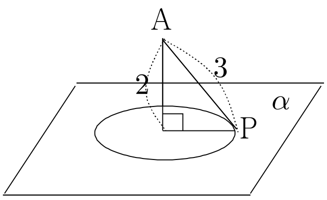
정답 ①

19. 출제의도 : 점과 평면 사이의 거리를 활용할 수 있고 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
점 $\mathrm{A}(2,2,1)$과 평면 α : $x+2y+2z-14=0$사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|2+2\cdot 2+2\cdot 1-14|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=2$$

그러므로 $\overline{\mathrm{AP}}\le 3$인 점 P가 나타내는 도형은 그림에서 반지름의 길이가 $\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ 인 원의 경계 및 내부이다.



한편, xy평면의 법선벡터는 $(0,0,1)$이고 평면 α의 법선벡터는 $(1,2,2)$이므로 xy평면과 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{|0\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot 2|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{2}{3}$$

따라서, 구하는 정사영의 넓이는

$$(\sqrt{5})^2\pi\times\cos\theta=5\pi\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}\pi$$

정답 ⑤

20. 출제의도 : 상용로그의 지표를 이해할 수 있는가?

정답풀이 :
$1\le n\le 100$이므로 $0\le f(n)\le 2$이다.

(i) $f(n)=0$ 즉 $1\le n\le 9$일 때
$f(n+10)=1$이어야 하므로
$10\le n+10<100$
$\therefore\ 1\le n\le 9$

(ii) $f(n)=1$ 즉 $10\le n\le 99$일 때
$f(n+10)=2$이어야 하므로
$100\le n+10<1000$
$\therefore\ 90\le n\le 99$

(iii) $f(n)=2$ 즉 $n=100$일 때
$f(n+10)=f(110)=2$이므로
$f(n+10)=3$을 만족하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수 n의 개수는
$9+10=19$

정답 ⑤

21. 출제의도 : 역함수의 미분법을 활용할 수 있는가?

정답풀이 :
$h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$이므로
$h'(t)=\{f(t)-g(t)\}+t\times\{f'(t)-g'(t)\}$
그러므로
$h'(5)=\{f(5)-g(5)\}+5\{f'(5)-g'(5)\}$ -----㉠

한편, $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=5$가 만나는 점의 x좌표는
$x^3+2x^2-15x+5=5$
$x(x^2+2x-15)=0$
$x(x+5)(x-3)=0$
$\therefore\ x=-5$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$
그러므로
$f(5)=3,\ g(5)=-5$ ----㉡

한편, $y' = 3x^2 + 4x - 15$에서

$$f'(5) = \frac{1}{3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 15} = \frac{1}{24}$$

$$g'(5) = \frac{1}{3 \cdot (-5)^2 + 4 \cdot (-5) - 15} = \frac{1}{40}$$

----ⓒ

ⓛ과 ⓒ을 ㉠에 대입하면

$$h'(5) = \{3 - (-5)\} + 5\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{40}\right)$$

$$= 8 + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{97}{12}$$

정답 ④

22. **출제의도** : 등차수열의 공차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

공차를 d라 하면

$a_2 = 2 + d,\ a_3 = 2 + 2d,\ a_9 = 2 + 8d$

이므로

$2(2 + d + 2 + 2d) = 2 + 8d$

$8 + 6d = 2 + 8d$

$\therefore\ d = 3$

정답 3

23. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = 4\sin 7x$이므로

$f'(x) = 28\cos 7x$

따라서,

$$f'(2\pi) = 28\cos(14\pi)$$

$$= 28$$

정답 28

24. **출제의도** : 확률밀도함수의 성질을 이해할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^1 f(x)dx = k\int_0^1 (x - x^4)dx$$

$$= k\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

$$= k\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{3}{10}k$$

$$= 1$$

에서

$$k = \frac{10}{3}$$

$$\therefore\ 24k = 24 \times \frac{10}{3} = 80$$

정답 80

25. **출제의도** : 등비수열의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

첫째항이 1, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n = r^{n-1}$$

또,

$$S_n = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

그러므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n-1}}{\frac{r^n - 1}{r - 1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{r^n - r^{n-1}}{r^n - 1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{r-1}{r-\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}}$$

$$=\frac{r-1}{r}$$

$$=1-\frac{1}{r}=\frac{3}{4}$$

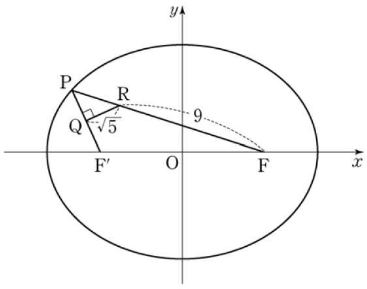
$\therefore\ \frac{1}{r}=\frac{1}{4}$

$\therefore\ r=4$

정답 4

26. 출제의도 : 코사인법칙과 타원의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :



직각삼각형 PQR에서

$\overline{\mathrm{PR}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{PF}}=3$

이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QF'}}=k$라 하면

$k^2+5=9$

$\therefore\ k=2\,(\because\ k>0)$

이때

$\overline{\mathrm{PF'}}=2\times 2=4$

$\overline{\mathrm{PF}}=3+9=12$

이고

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=12+4=16$

이므로 주어진 타원의 장축의 길이는 16이다.

따라서 $2a=16$이므로

$a=8$

직각삼각형 PQR에서 $\angle\mathrm{QPR}=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{2}{3}$

따라서 삼각형 FPF′에서 코사인 정리에 의해

$$\overline{\mathrm{FF'}}^2=12^2+4^2-2\times 12\times 4\times\cos\theta$$
$$=160-96\times\frac{2}{3}$$
$$=160-64=96$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{FF'}}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

따라서 $c=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{FF'}}=2\sqrt{6}$이므로

$a^2-b^2=(2\sqrt{6})^2$

$b^2=64-24=40$

$\therefore\ a^2+b^2=64+40=104$

정답 104

27. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

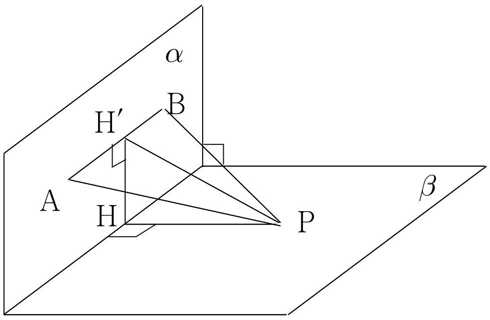
정답풀이 :

그림과 같이 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\overline{PH}\perp\alpha$, $\overline{HH'}\perp$ (직선AB)

그러므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{PH'}\perp$ (직선AB)



한편, 점 A와 평면 β 사이의 거리가 2이고 직선 AB가 평면 β와 평행하므로

$\overline{HH'}=2$

또, 점 P와 평면 α 사이의 거리가 4이므로

$\overline{PH}=4$

그러므로 직각삼각형 OHH′에서

$$\overline{PH'}=\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{HH'}^2}$$
$$=\sqrt{4^2+2^2}$$
$$=2\sqrt{5}$$

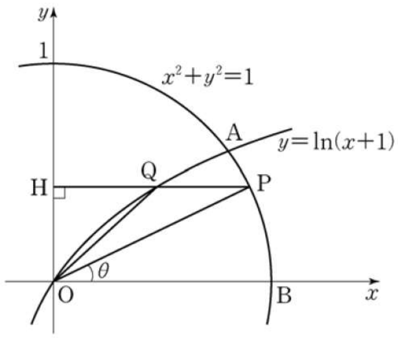
따라서, 삼각형 PAB이 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH'}$$
$$=\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times2\sqrt{5}$$
$$=15$$

정답 15

28. 출제의도 : 삼각함수와 로그함수의 극한을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$P(\cos\theta, \sin\theta)$이므로 점 Q의 x좌표는

$\sin\theta=\ln(x+1)$에서

$x=e^{\sin\theta}-1$

따라서 $Q(e^{\sin\theta}-1, \sin\theta)$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1\right)\times\sin\theta$$

한편 $H(0, \sin\theta)$이므로

$L(\theta)=e^{\sin\theta}-1$

$$\therefore\ k=\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{L(\theta)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1)\sin\theta}{e^{\sin\theta}-1}$$
$$=\frac{1}{2}\times\lim_{\theta\to+0}\left(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1\right)\times\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{e^{\sin\theta}-1}$$
$$=\frac{1}{2}\times(1-1+1)\times1=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 60k=60\times\frac{1}{2}=30$$

정답 30

29. 출제의도 : 벡터의 내적의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$를 시점이 원점이 되도록 옮겼을 때, 종점을 P'이라 하자.

이때,

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$

$=\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

이때, 점 Q가 점 P'이 되도록 잡으면 최댓값을 가지므로

$\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\leq\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}'}-\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=1-\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ -----㉠

한편,

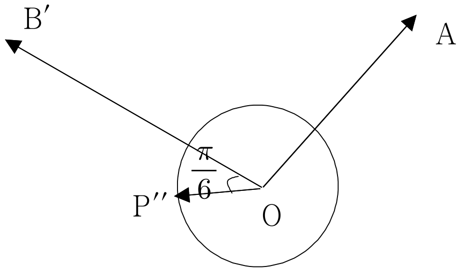
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=\left(1,-\sqrt{2},2\sqrt{3}\right)-\left(2,\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$

$=\left(-1,-2\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$

이고 점 B'을 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$이라 하자.

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이므로 그림과 같이 점 P'이 세 점 $\mathrm{O},\mathrm{A},\mathrm{B}'$에 의하여 결정된 평면 위에 그림과 같이 P''에 있을 때, $\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$는 최솟값을 갖는다.



이때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$이 이루는 각의 크기를 α라 하면

$$\cos\alpha=\frac{\left(2,\sqrt{2},\sqrt{3}\right)\cdot\left(-1,-2\sqrt{2},\sqrt{3}\right)}{\sqrt{4+2+3}\sqrt{1+8+3}}$$

$$=\frac{(-2)+(-4)+3}{6\sqrt{3}}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

이때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}''}$이 이루는 각의 크기는 $\alpha+\frac{\pi}{6}$이고

$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{33}}{6}\times\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{33}}{12}$

그러므로

$\overrightarrow{\mathrm{OP}''}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}''}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$

$=1\times\sqrt{4+2+3}\times\left(-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{33}}{12}\right)$

$=-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{33}}{4}$

그러므로 ㉠에서

$1-\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\leq 1-\overrightarrow{\mathrm{OP}''}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=\frac{7}{4}+\frac{\sqrt{33}}{4}$

따라서, 최댓값은 $\frac{7}{4}+\frac{\sqrt{33}}{4}$이므로

$a=\frac{7}{4},\ b=\frac{1}{4}$

$\therefore\ 16\left(a^2+b^2\right)=50$

정답 50

30. 출제의도 :

정적분의 성질과 연속함수의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(나)에 주어진 등식에 $x=0$ 을 대입하면

$f(0)=0$ …… ㉠

(나)에 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x) = \sqrt{4-2f(x)}$

$\therefore\ \{f'(x)\}^2 = 4-2f(x)$

(단, $f'(x) \geq 0$, $f(x) \leq 2$) …… ㉡

$x \leq b$일 때

$f'(x) = 2a(x-b)$이므로 ㉡에서

$4a^2(x-b)^2 = 4-2\{a(x-b)^2+c\}$ …… ㉢

㉢이 $x \leq b$인 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$4a^2 = -2a$이고 $4-2c=0$ 이다.

$\therefore\ a = -\frac{1}{2}$, $c=2$

따라서 $x \leq b$ 일 때

$f(x) = -\frac{1}{2}(x-b)^2+2$

이때 $b<0$ 이면 $f(b)=2$이고 ㉠에서 $f(0)=0$ 이므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이라는 ㉡의 조건에 모순이다.

$\therefore\ b \geq 0$

㉠에서 $f(0)=0$이므로

$f(0) = -\frac{1}{2}b^2+2=0$

$\therefore\ b^2=4$

$\therefore\ b=2(\because\ b \geq 0)$

이때 ㉡에서 $f'(x) \geq 0$이고 $f(x) \leq 2$이므로

$x>b$일 때 $f(x)=2$이다.

따라서

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2+2 & (x \leq 2) \\ 2 & (x>2) \end{cases}$$

이므로

$$\int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^6 f(x)dx$$

$$= \int_0^2 \left\{-\frac{1}{2}(x-2)^2+2\right\}dx + \int_2^6 2dx$$

$$= \left[-\frac{1}{6}(x-2)^3+2x\right]_0^2 + [2x]_2^6$$

$$= \left(4-\frac{8}{6}\right)+(12-4)$$

$$= 12-\frac{4}{3} = \frac{32}{3}$$

$\therefore\ p+q = 3+32 = 35$

정답 35