2016학년도 대학수학능력시험

수학영역 A형 정답 및 풀이

01. ⑤ 02. ④ 03. ③ 04. ② 05. ④ 06. ① 07. ① 08. ② 09. ⑤ 10. ⑤ 11. ① 12. ③ 13. ③ 14. ⑤ 15. ② 16. ② 17. ④ 18. ③ 19. ④ 20. ① 21. ⑤ 22. 7 23. 3 24. 6 25. 11 26. 30 27. 21 28. 97 29. 45 30. 222

1. **출제의도** : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$A-B=\begin{pmatrix}2&1\\5&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&1\\4&-1\end{pmatrix}$$

따라서, 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합은

$1+1+4+(-1)=5$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$8^{\frac{1}{3}}+27^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}+(3^3)^{\frac{2}{3}}$$
$$=2^1+3^2$$
$$=2+9=11$$

정답 ④

3. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2+5)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x^2+5)$$
$$=(-2)^2+5=9$$

정답 ③

4. **출제의도** : 그래프와 행렬 사이의 관계를 알고 있는가?

정답풀이 :

주어진 그래프의 변의 개수가 7이므로 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는

$7\times 2=14$

정답 ②

5. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3+7x+3$에서

$f'(x)=3x^2+7$ 이므로

$f'(1)=3\times 1^2+7=10$

정답 ④

6. **출제의도** : 확률의 관계식에서 확률의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\mathrm{P}(B\,|\,A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{5}{6}\text{이므로}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{6}\times\mathrm{P}(A)=\frac{5}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{3}$$

정답 ①

7. **출제의도** : 등비수열의 일반항을 이용하여 첫째항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_3=4a_1$ 에서 $a_1r^2=4a_1$ 이므로

$r^2=4$

$a_7=(a_6)^2$ 에서 $a_1r^6=(a_1r^5)^2=a_1^2r^{10}$

따라서 $a_1r^4=1$ 이므로

$a_1\times 4^2=16a_1=1$

$\therefore\ a_1=\frac{1}{16}$

정답 ①

8. **출제의도** : 그래프를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to -1-0} f(x)=1,\ \lim_{x\to +0} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to -1-0} f(x)+\lim_{x\to +0} f(x)=1+1=2$

정답 ②

9. **출제의도** : 모표준편차를 이용하여 표본표준편차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{14}{\sqrt{n}}=2$

$\sqrt{n}=7$

$\therefore\ n=49$

정답 ⑤

10. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
이차방정식 $x^2-(n+1)x+a_n=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(n+1)^2-4a_n \geq 0$에서

$a_n \leq \frac{(n+1)^2}{4}$

또 이차방정식 $x^2-nx+a_n=0$의 판별식을 D_2이라 하면

$D_2=n^2-4a_n<0$에서

$a_n>\frac{n^2}{4}$

즉 $\frac{n^2}{4}<a_n \leq \frac{(n+1)^2}{4}$

$\frac{n^2}{4n^2}<\frac{a_n}{n^2}\leq \frac{(n+1)^2}{4n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2}\leq \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}\leq \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}=\frac{1}{4}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{4}$

정답 ⑤

11. **출제의도** : 로그부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
진수조건에서

$x-1>0,\ \frac{1}{2}x+k>0$

이므로 $x>1\cdots$㉠

$\log_5(x-1)\leq \log_5\left(\frac{1}{2}x+k\right)$ 에서

$x-1 \le \frac{1}{2}x+k$, $\frac{1}{2}x \le k+1$

$\therefore\ x \le 2(k+1) \cdots$ ㉡

㉠,㉡에서 $1 < x \le 2(k+1)$ 이고 모든 정수 x의 개수가 3이므로

$2(k+1)-1=2k+1=3$

$\therefore\ k=1$

정답 ①

12. **출제의도** : 정규분포를 따르는 확률변수에 대하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌀의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(1.5, 0.2^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-1.5}{0.2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(1.3 \le X \le 1.8)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{1.3-1.5}{0.2} \le \frac{X-1.5}{0.2} \le \frac{1.8-1.5}{0.2}\right)$

$=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 1.5)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)$

$=0.3413+0.4332=0.7745$

정답 ③

13. **출제의도** : 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$n=1$일 때,

$f(x)=x^2$ 이고 $P(0,3)$, $Q(1,1)$

이므로 구하고자 하는 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times 2\times 1+\int_0^1 (1-x^2)dx$

$=1+\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$=1+\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$

정답 ③

14. **출제의도** : 넓이와 길이를 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, 1\right)$이므로 $\overline{\mathrm{PR}}=2n$, $\overline{\mathrm{QR}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$

$S_n=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{n}}\times 2n=\sqrt{n}$

$l_n=\sqrt{4n^2+\frac{1}{n}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{{S_n}^2}{l_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+\frac{1}{n}}}$

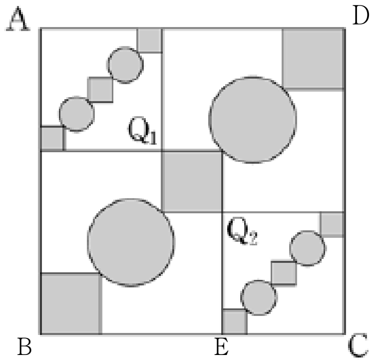
$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n^3}}}$

$=\frac{1}{2}$

정답 ⑤

15. **출제의도** : 무한등비급수를 이용하여 반복되는 도형에서 넓이의 합에 대한 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$\overline{BE} : \overline{EC} = 3:2$ 이므로 닮음비는 $\frac{2}{5}$이다. 따라서 넓이의 비는 $(\frac{2}{5})^2 = \frac{4}{25}$이고 도형의 개수는 2배씩 늘어나므로 무한등비급수의 공비는

$$\frac{4}{25} \times 2 = \frac{8}{25}$$

또한, 그림 R_1에서 $\overline{BD} = 5\sqrt{2}$ 이므로

$$S_1 = 3 \times 1 + 2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \pi$$
$$= 3 + \pi$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{3+\pi}{1-\frac{8}{25}}$$
$$= \frac{25}{17}(\pi + 3)$$

정답 ②

16. 출제의도 : 실생활에서 주어진 관계식을 이용하여 실수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{W}{W_0} = \frac{1}{2} \times 10^{at}(1 + 10^{at})$$

$3 = \frac{1}{2} \times 10^{15a}(1 + 10^{15a})$에서

$$(10^{15a})^2 + 10^{15a} - 6 = 0$$
$$(10^{15a} + 3)(10^{15a} - 2) = 0$$

$10^{15a} > 0$이므로 $10^{15a} = 2$

$$\therefore\ k = \frac{1}{2} \times 10^{30a}(1 + 10^{30a})$$
$$= \frac{1}{2} \times 4 \times (1+4) = 10$$

정답 ②

17. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

0인 것 2개를 정하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10 \cdots ㉠$$

$a = b = 0$일 때, $c + d + e = 10$을 만족시키는 자연수 c, d, e의 순서쌍 (c, d, e)의 개수는

$c = c' + 1,\ d = d' + 1,\ e = e' + 1$

(단, c', d', e'는 음이 아닌 정수)

라 하면

$(c'+1) + (d'+1) + (e'+1) = 10$

$c' + d' + e' = 7$

을 만족시키는 순서쌍 (c', d', e')의 개수와 같으므로

$${}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2$$
$$= \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36 \cdots ㉡$$

㉠,㉡에서 구하고자 하는 순서쌍의 개수는

$10 \times 36 = 360$

정답 ④

18. 출제의도 : 주어진 관계식을 이용하여 행렬의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $A+B=BABA$이고,

$ABA=B+E$에서 $BABA=B^2+B$

이므로 $A+B=B^2+B$

에서 $A=B^2$ (참)

ㄴ. $ABA=B+E$에서 $B^2BB^2=B+E$

이므로 $(B^4-E)B=E$

$(A^2-E)B=E$

$\therefore\ B^{-1}=A^2-E$ (거짓)

ㄷ. ㄱ에서 $A=B^2$이므로

$A+B=(BA)^2$에서 $A+B=B^6$이고,

$A+B=(B^2)^3=A^3$

$ABA=B+E$에서 $B^5=B+E$

또한, $A^3=A+B$의 양변에 A^2을 곱하면

$A^5=A^3+A^2B$

$=A+B+A^2B$

$=A+B+B^5$

이므로 $A^5-B^5=A+B$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ③

19. 출제의도 : 수열의 일반항을 구하는 과정을 이해할 수 있는가?

정답풀이 :

$b_1=2$ 이고 $b_n=b_{n-1}+2n$ $(n\geq 2)$이다.

수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구해보면

$b_n-b_{n-1}=2n$

에서

$b_2-b_1=2\times 2$

$b_3-b_2=2\times 3$

$\cdots$

$b_n-b_{n-1}=2n$

이므로 좌변은 좌변끼리 우변은 우변끼리 모두 더하면

$b_n-b_1=2(2+3+\cdots+n)$

$\therefore\ b_n=b_1+2(2+3+\cdots+n)$

$=2+2(2+3+\cdots+n)$

$=2(1+2+3+\cdots+n)$

$=2\times\dfrac{n(n+1)}{2}=\boxed{n}(n+1)$

따라서, $b_n=\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$ 이므로

$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=n(n+1)$

에서

$\dfrac{S_2}{S_1}=1\times 2$

$\dfrac{S_3}{S_2}=2\times 3$

$\cdots$

$\dfrac{S_n}{S_{n-1}}=(n-1)n$

이고 좌변은 좌변끼리 우변은 우변끼리 모두 곱하면

$\dfrac{S_n}{S_1}=1\times 2^2\times 3^2\times\cdots\times(n-1)^2\times n$

$\therefore\ S_n=\boxed{n}\times\{(n-1)!\}^2$

따라서, $a_1=1$ 이고 $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n\times\{(n-1)!\}^2-(n-1)\times\{(n-2)!\}^2$

$=\{n(n-1)^2-(n-1)\}\times\{(n-2)!\}^2$

$=\boxed{(n-1)(n^2-n-1)}\times\{(n-2)!\}^2$

$\therefore \quad f(n)=n,\ g(n)=(n-1)(n^2-n-1)$

$\therefore \quad f(10)+g(6)=10+5\times 29$

$=10+145=155$

정답 ④

20. 출제의도 : 조건을 만족시키는 다항함수에 대하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$h(-x)=f(-x)g(-x)$

$=-f(x)g(x)=-h(x)$

이므로 다항함수 $h(x)$의 그래프는 원점에 대칭이고, $h(0)=0$이다.

$h(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_1x$

로 놓으면

$h'(x)=(2n+1)a_{2n+1}x^{2n}+(2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2}$

$+\cdots+a_1$

이므로 $h'(-x)=h'(x)$를 만족시킨다.

$\int_{-3}^{3}(xh'(x)+5h'(x))dx$

$=2\int_{0}^{3}5h'(x)dx$

$=10[h(x)]_0^3$

$=10(h(3)-h(0))$

$10(h(3)-h(0))=10$에서

$h(3)=h(0)+1=0+1=1$

정답 ①

21. 출제의도 : 조건에 맞는 삼차함수를 찾아 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여

$f(-1)=0$

또한, 조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 닫힌 구간 $[3,5]$에서 x축과 접하게 된다.

따라서,

$f(x)=k(x+1)(x-\alpha)^2\ (k\neq 0,\ 3\leq\ \alpha\leq\ 5)$

라고 하면

$f'(x)=k(x-\alpha)^2+2k(x+1)(x-\alpha)$

이므로

$\dfrac{f'(0)}{f(0)}=\dfrac{k\alpha^2-2k\alpha}{k\alpha^2}$

$=1-\dfrac{2}{\alpha}$

그런데, $3\leq\ \alpha\leq\ 5$ 이므로

$\alpha=3$일 때 최솟값 $m=\dfrac{1}{3}$

$\alpha=5$일 때 최댓값 $M=\dfrac{3}{5}$

$\therefore \quad Mm=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{5}$

정답 ⑤

22. 출제의도 : 등차수열의 공차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_8-a_4=4d=28$

$\therefore\ d=7$

정답 7

23. **출제의도** : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times 9^n-13}{9^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{3-13\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$$

$$=3$$

정답 3

24. **출제의도** : 행렬로 표현된 연립일차 방정식을 만족시키는 상수 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{pmatrix}1 & a-2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2 & a-2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지므로

$(-2)\times(-4)-(a-2)\times 2=0$

에서 $a=6$

정답 6

25. **출제의도** : 이산확률변수에서 기댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$E(X)=-5\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{5}+5\times\frac{3}{5}$$

$$=-1+3=2$$

$$\therefore\ E(4X+3)=4E(X)+3$$

$$=4\times 2+3=11$$

정답 11

26. **출제의도** : 조건부확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직원 60명을 두 부서 A, B와 남자, 여자로 나누어 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위 : 명)

	A 부서	B 부서
남자	10	
여자	10	$0.6n$

여성 직원의 수를 n이라 하면 B 부서에 속해있는 여성 직원의 수는 $0.6n$이므로

$n=10+0.6n$에서 $n=25$

임의로 택한 직원이 B 부서인 사건을 E, 여성 직원인 사건을 F라 하면

$$\mathrm{P}(F\mid E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}$$

$$=\frac{\frac{0.6n}{60}}{\frac{40}{60}}$$

$$=\frac{\frac{15}{60}}{\frac{40}{60}}=\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$$

따라서 $p=\dfrac{3}{8}$이므로 $80p=80\times\dfrac{3}{8}=30$

정답 30

27. **출제의도** : 두 함수의 곱이 연속함수가 될 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속일 때

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a+0}(x+3)=a+3$$

$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a-0} (x^2 - x) = a^2 - a$

이므로

$a^2 - a = a + 3$, $a^2 - 2a - 3 = 0$

$(a-3)(a+1) = 0$

$\therefore$ $a = -1$ 또는 $a = 3$

(ii) 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 불연속일 때

$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a}\{x - (2a+7)\}$

$= a - (2a+7)$

$= -a - 7 = 0$

$\therefore$ $a = -7$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은

$-1 \times 3 \times (-7) = 21$

정답 21

28. **출제의도** : 함수의 극한과 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서 $x \to 2$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 하므로

$f(2) = g(2)$

조건 (가)에서 $x = 2$를 대입하면

$g(2) = 8f(2) - 7$이므로

$g(2) = 8g(2) - 7$에서 $g(2) = 1$

또 조건 (나)에서

$\lim_{x \to 2} \frac{\{f(x) - f(2)\} - \{g(x) - g(2)\}}{x - 2}$

$= f'(2) - g'(2) = 2$

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x)$

$x = 2$를 대입하면

$g'(2) = 12 \times 1 + 8f'(2)$

$g'(2) = 12 \times 1 + 8\{g'(2) + 2\}$

$= 8g'(2) + 28$

에서 $g'(2) = -4$

따라서 접선의 방정식은

$y - 1 = -4(x-2)$, $y = -4x + 9$이므로

$a^2 + b^2 = (-4)^2 + 9^2 = 97$

정답 97

29. **출제의도** : 정적분의 의미를 이해하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(0) = 0$ 이므로

$f(x) = ax^2 + bx$ $(a \neq 0)$라 하자.

조건 (가)에 의하여

$\int_0^2 |f(x)| dx = 4$, $\int_0^2 f(x) dx = -4$

이므로 구간 $[0,2]$에서 $f(x) \leq 0$이다.

또한, 조건 (나)에 의하여

$\int_2^3 |f(x)| dx = \int_2^3 f(x) dx$

이므로 구간 $[2,3]$에서 $f(x) \geq 0$이다.

따라서, $f(2) = 0$ 이므로

$f(2) = 4a + 2b = 0$

$\therefore$ $b = -2a$

즉, $f(x) = ax^2 - 2ax$ 이므로

$\int_0^2 (ax^2 - 2ax) dx$

$= [\frac{a}{3}x^3 - ax^2]_0^2$

$= \frac{8}{3}a - 4a = -\frac{4}{3}a = -4$

$\therefore \quad a=3$

따라서, $f(x)=3x^2-6x$ 이므로

$f(5)=3\times5^2-6\times5=75-30=45$

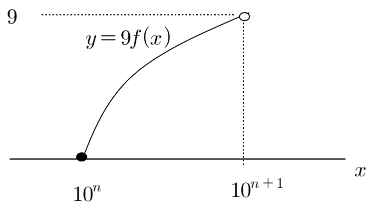
정답 45

30. 출제의도 : 상용로그의 가수를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$n\geq -2$인 정수에 대하여

$10^n \leq x<10^{n+1}$일 때, 함수 $y=9f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



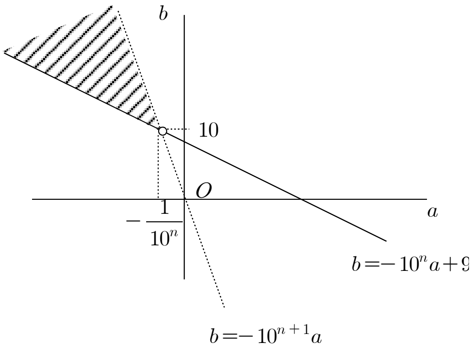
따라서, 조건 (나)를 만족시키기 위해서는

(i) $n\geq -1$인 정수일 때,

$9\leq a\times10^n+b,\ a\times10^{n+1}+b<0$

$\therefore \quad -10^na+9\leq b<-10^{n+1}a$

따라서, 조건 (가)를 만족시키면서 위의 부등식을 만족시키는 순서쌍 (a,b)가 나타내는 영역은 그림과 같다.



이때, $(a+20)^2+b^2$은 점 $(-20,0)$과 점 (a,b)사이의 거리의 제곱이다. 따라서, $n=-1$일 때, 점 $(-20,0)$에서 직선 $b=-10^na+9$까지의 거리의 제곱이 최소이므로

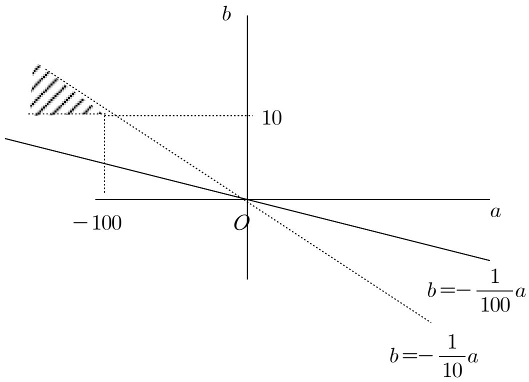
$$\left(\frac{|10^{-1}\times(-20)-9|}{\sqrt{(10^{-1})^2+1^2}}\right)^2=\frac{121}{\frac{101}{100}}=100\times\frac{121}{101}$$

(ii) $n=-2$일 때,

$\frac{1}{100}a+b\geq 0,\ \frac{1}{10}a+b<0$

$-\frac{1}{100}a\leq b<-\frac{1}{10}a$

따라서, 조건 (가)를 만족시키면서 위의 부등식을 만족시키는 순서쌍 (a,b)가 나타내는 영역은 그림과 같다.



따라서, $(a+20)^2+b^2$의 값은 점 $(-20,0)$에서 위의 영역 위의 점 (a,b)까지의 거

리의 제곱이므로

$\sqrt{(-100+20)^2+10^2}=10\sqrt{65}$

보다 크게 된다.

(i), (ii)에 의하여 최솟값은 $100\times\dfrac{121}{101}$ 이

므로 $p+q$의 값은

$121+100=222$

정답 222