2020학년도 대학수학능력시험 대비

2019학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학(가형) 정답

1	③	2	④	3	①	4	⑤	5	②
6	④	7	⑤	8	①	9	②	10	④
11	③	12	⑤	13	②	14	④	15	⑤
16	①	17	④	18	①	19	②	20	③
21	③	22	84	23	2	24	59	25	18
26	440	27	50	28	960	29	12	30	26

해 설

1. [출제의도] 평면벡터의 실수배와 뺄셈을 계산한다.

$2\vec{a}-\vec{b}=(2,\ 4)-(-2,\ 5)=(4,\ -1)$

벡터 $2\vec{a}-\vec{b}$ 의 모든 성분의 합은 $4+(-1)=3$

2. [출제의도] 로그함수의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+8x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+8x)}{8x}\times 4\right\}$$

$$=4\times\lim_{x\to 0}\ln(1+8x)^{\frac{1}{8x}}$$

$$=4\times\ln e=4$$

3. [출제의도] 좌표공간에서 삼각형의 무게중심의 좌표를 계산한다.

세 점 $\mathrm{A}(2,\ 6,\ -3)$, $\mathrm{B}(-5,\ 7,\ 4)$, $\mathrm{C}(3,\ -1,\ 5)$ 에서

삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표가

$$\left(\frac{2+(-5)+3}{3},\ \frac{6+7+(-1)}{3},\ \frac{(-3)+4+5}{3}\right)$$

즉 $(0,\ 4,\ 2)$

따라서 $a=4$, $b=2$ 이므로 $a+b=4+2=6$

4. [출제의도] 확률의 곱셈정리를 이해한다.

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

두 사건 A, B^C도 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{3}$,

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{1}{12}$

$\dfrac{1}{3}\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{1}{12}$, $\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{1}{4}$ 이므로

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

5. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이해한다.

직선 $y=\dfrac{1}{2}x$가 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{k}-\dfrac{y^2}{64}=1$ 의 한 점근선이고,

점근선 중 기울기가 양수인 점근선의 방정식이

$y=\dfrac{8}{\sqrt{k}}x$ 이므로 $\dfrac{8}{\sqrt{k}}=\dfrac{1}{2}$, $\sqrt{k}=16$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는 $2\sqrt{k}=32$ 이다.

6. [출제의도] 지수에 미지수가 포함된 방정식을 이해한다.

$2^x=t\ (t>0)$이라 하면 방정식 $t^2-2kt+16=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 양수이므로 방정식 $t^2-2kt+16=0$은 양수인 중근을 갖는다.

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-16$

$=k^2-16=(k-4)(k+4)=0$

두 근의 합이 양수이므로 $k=4$

$2^x=4=2^2$ 에서 $\alpha=2$ 이므로 $k+\alpha=6$

7. [출제의도] 좌표평면에서 점의 운동을 이해한다.

$x=2t+\sin t$, $y=1-\cos t$ 에서

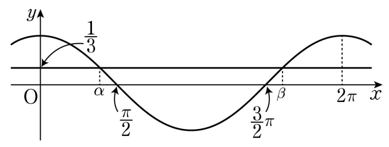
$\dfrac{dx}{dt}=2+\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=\sin t$

시각 $t=\dfrac{\pi}{3}$ 에서 속도 $\vec{v}$ 는 $\vec{v}=\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

따라서 시각 $t=\dfrac{\pi}{3}$ 에서 점 P 의 속력 $|\vec{v}|$은

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25+3}{4}}=\sqrt{7}$$

8. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.



$0<\alpha<\beta<2\pi$, $\cos\alpha=\cos\beta=\dfrac{1}{3}$ 이므로 그림에서

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$

즉 $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin\beta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 이므로

$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$

$$=\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

9. [출제의도] 치환적분법을 이해하여 넓이를 구한다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$ 이므로 $f(2x+1)>0$

구하는 넓이는 $\displaystyle\int_1^2 f(2x+1)dx$

$2x+1=t$ 라 하면 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}$ 이고

$x=1$일 때 $t=3$, $x=2$일 때 $t=5$ 이므로

$$\int_1^2 f(2x+1)dx=\int_3^5\frac{f(t)}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_3^5 f(t)dt=18$$

10. [출제의도] 독립시행의 확률을 이해한다.

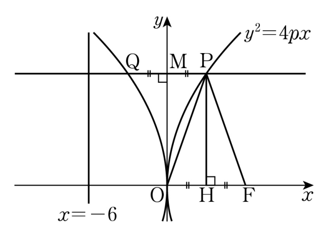
주사위를 던져서 나온 눈의 수와 앞면이 나온 동전의 개수가 모두 $n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$일 확률은

$$\frac{1}{6}\times{}_6\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{6-n}=\frac{1}{6\times 2^6}\times{}_6\mathrm{C}_n$$

따라서 구하는 확률은

$$\sum_{n=1}^{6}\left(\frac{1}{6\times 2^6}\times{}_6\mathrm{C}_n\right)=\frac{1}{6\times 2^6}\times(2^6-1)=\frac{21}{128}$$

11. [출제의도] 포물선의 성질을 이해한다.



두 포물선 $y^2=4px$ 와 $y^2=-4px$ 는 y축에 대하여 대칭이므로 직선 QP 와 y축이 만나는 점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{PM}}=3$ 이고, 점 P 에서 x축에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{PM}}=3$ 이므로 $p=6$

즉 포물선 $y^2=4px$ 의 준선의 방정식은 $x=-6$ 이다.

따라서 포물선의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{PF}}=6+\overline{\mathrm{PM}}=6+3=9$

12. [출제의도] 합성함수의 미분법을 이해한다.

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{g(x)+1}{x-1}=2$ 에서

$x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이면 (분자)$\to 0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\{g(x)+1\}=g(1)+1=0$, $g(1)=-1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=2$$

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-2}{x-1}=12$ 에서

$x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이면 (분자)$\to 0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\{h(x)-2\}=h(1)-2=0$, $h(1)=2$

$$\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)=12$$

$h(x)=(f\circ g)(x)$에서 $x=1$일 때

$h(1)=f(g(1))=f(-1)=2$

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$에서 $x=1$일 때

$h'(1)=f'(g(1))g'(1)=f'(-1)\times 2=12$

즉 $f'(-1)=6$

따라서 $f(-1)+f'(-1)=2+6=8$

13. [출제의도] 표본평균의 분포를 이해한다.

이 도시의 시민 한 명이 1년 동안 병원을 이용한 횟수를 확률변수 X라 하면, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(14,\ 3.2^2)$ 을 따르므로 크기가 256인 표본평균 $\overline{X}$ 는 정규분포 $\mathrm{N}(14,\ 0.2^2)$ 을 따른다. 확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-14}{0.2}$ 는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(13.7\le\overline{X}\le 14.2)=\mathrm{P}\left(\frac{13.7-14}{0.2}\le Z\le\frac{14.2-14}{0.2}\right)$$

$$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1)$$

$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$

$$=0.4332+0.3413=0.7745$$

14. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.

두 곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$ 와 $y=(\sqrt{2})^x+a$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 직선 AB는 직선 $y=x$에 수직이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(2t,\ t)\ (t>0)$이라 하면 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(t,\ 2t)$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}t$ 이다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\left(\dfrac{3}{2}t,\ \dfrac{3}{2}t\right)$

삼각형 OAB는 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$ 인 이등변삼각형이므로

삼각형 OAB의 넓이는

$$6=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}t\times\frac{3\sqrt{2}}{2}t=\frac{3}{2}t^2$$

이므로 $t=2$

즉 $\mathrm{A}(4,\ 2)$ 가 곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$ 위의 점이므로

$2=\log_{\sqrt{2}}(4-a)$, $(\sqrt{2})^2=4-a$

따라서 구하는 상수 a의 값은 2 이다.

15. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 문제를 해결한다.

모든 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_3=56$ 이다.

$a+b+c$가 짝수인 사건을 A, a가 홀수인 사건을 B라 하면 사건 A는 세 수 a, b, c가 모두 짝수이거나 하나만 짝수인 사건이다.

세 수 a, b, c가 모두 짝수인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3=4$, 하나만 짝수인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2=24$ 이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{4+24}{56}=\dfrac{1}{2}$

사건 $A\cap B$는 $a+b+c$가 짝수이면서 a가 1, 3, 5 중 하나인 사건이다. $a=1$인 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=12$, $a=3$인 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=6$, $a=5$인 경우의 수는 ${}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=2$ 이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{12+6+2}{56}=\dfrac{5}{14}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{5}{14}}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{7}$$

16. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 추론한다.

$\overline{\mathrm{AB}}=2$ 이므로 직각삼각형 ABP 에서 $\overline{\mathrm{BP}}=2\sin\theta$

두 선분 BP, BQ 는 모두 원 C_2 의 반지름이므로

$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{BQ}}=2\sin\theta$

$\overline{\mathrm{OB}}=1$ 이므로 피타고라스 정리에 의해
직각삼각형 OBQ 에서 $\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{1-4\sin^2\theta}$
즉 $S(\theta)=2\sin\theta\sqrt{1-4\sin^2\theta}$
따라서 구하는 극한값은

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin\theta\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta}=2$$

17. [출제의도] 합성함수 미분법을 이용하여 함수를 추론한다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다. 조건 (가)에서

$f(0)=\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(axe^{2x}+bx^2)=0$

조건 (나)에서 임의의 $x_1(x_1<0)$에 대하여

$$f'(x_1)=\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\lim_{x\to x_1}3=3$$

이므로 $x<0$일 때 $f'(x)=3$이고

$f(x)=\int 3dx=3x+C$ (C는 적분상수)

$\lim_{x\to0-}f(x)=C=f(0)=0$이므로

$x<0$일 때 $f(x)=3x$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{axe^{2x}+bx^2}{x}=\lim_{x\to0+}(ae^{2x}+bx)=a$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{3x}{x}=3$$

이므로 $a=3$이다.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3e}{2}+\frac{b}{4}=2e$에서 $b=2e$이므로

$$f(x)=\begin{cases}3x & (x\le0)\\ 3xe^{2x}+2ex^2 & (x>0)\end{cases}$$ 이고

$$f'(x)=\begin{cases}3 & (x\le0)\\ 3e^{2x}+6xe^{2x}+4ex & (x>0)\end{cases}$$

이므로 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=3e+3e+2e=8e$

18. [출제의도] 합의 법칙을 이용하여 경우의 수를 추론한다.

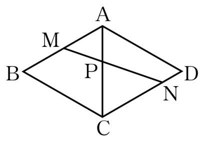
(i) 1, 2가 적힌 두 카드가 서로 이웃하는 경우
이 두 카드를 한 묶음으로 생각하여 나열하는 경우의 수는 $4!$이고, 두 카드의 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이므로 1, 2가 적힌 두 카드가 이웃하도록 5장의 카드를 나열하는 경우의 수는
$4!\times2=\boxed{48}$이다.

(ii) 1, 3이 적힌 두 카드가 서로 이웃하는 경우
(i)과 마찬가지로 경우의 수는 $\boxed{48}$이다.

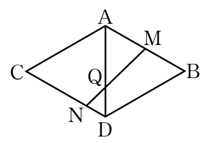
(iii) (i)과 (ii)가 동시에 일어나는 경우
1, 2, 3이 적힌 세 카드를 한 묶음으로 생각하여 나열하는 경우의 수는 $3!$이고, 세 카드 중 1이 적힌 카드가 가운데에 위치하도록 세 카드를 나열하는 경우의 수는 2이므로 5장의 카드를 나열하는 경우의 수는 $3!\times2=\boxed{12}$이다.

5장의 카드를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 $5!=120$이므로 (i), (ii), (iii)에 의해 구하는 경우의 수는 $120-(48+48-12)=\boxed{36}$이다.
따라서 $p=48$, $q=12$, $r=36$이므로
$p+q+r=48+12+36=96$

19. [출제의도] 정사영의 성질을 이용하여 공간도형 문제를 해결한다.

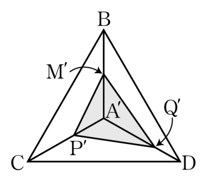


[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]과 같이 네 점 A, B, C, D가 한 평면에 있도록 전개하면 조건을 만족하는 점 P는 선분 AC와 선분 MN이 만나는 점이다.
사각형 ABCD는 평행사변형이므로 $\overline{\mathrm{AB}}//\overline{\mathrm{CD}}$ 이다.
따라서 삼각형 AMP와 삼각형 CNP는 닮음이고 $\overline{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}$, $\overline{\mathrm{CN}}=\frac{3}{4}$이므로 점 P는 선분 AC를 2:3으로 내분하는 점이다.
같은 방법으로 [그림 2]에서 점 Q는 선분 AD를 2:1로 내분하는 점임을 알 수 있다.



네 점 A, M, P, Q의 평면 BCD 위로의 정사영을 각각 A′, M′, P′, Q′이라 하면 점 M′은 선분 A′B의 중점이고, 점 P′은 선분 A′C를 2:3으로 내분하는 점이고, 점 Q′은 선분 A′D를 2:1로 내분하는 점이다.
이때 점 A′은 정삼각형 BCD의 무게중심이므로

$$\overline{\mathrm{A'B}}=\overline{\mathrm{A'C}}=\overline{\mathrm{A'D}}=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

이고, $\overline{\mathrm{A'M'}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A'B}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$,

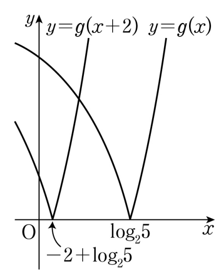
$\overline{\mathrm{A'P'}}=\frac{2}{5}\overline{\mathrm{A'C}}=\frac{2\sqrt{3}}{15}$, $\overline{\mathrm{A'Q'}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{A'D}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

삼각형 M′P′Q′의 넓이 S는 세 삼각형 A′M′P′, A′P′Q′, A′Q′M′의 넓이의 합이므로

$$S=\frac{1}{2}\times\sin\frac{2}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\times\frac{2\sqrt{3}}{15}+\frac{2\sqrt{3}}{15}\times\frac{2\sqrt{3}}{9}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{15}$$

20. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 최솟값에 대한 문제를 해결한다.

$g(x)=|2^x-5|$라 하면 함수 $y=g(x+2)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 그림과 같이 $-2+\log_2 5$보다 크고 $\log_2 5$보다 작다.



$f'(x)=g(x+2)-g(x)$이므로 $f'(x)=0$에서
$f'(x)=2^{x+2}-5-(-2^x+5)=0$, $5\times2^x=10$, $x=1$
$x<1$에서 $f'(x)<0$이고, $x>1$에서 $f'(x)>0$이므로
함수 $y=f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이다.

$$\begin{aligned}f(1)&=\int_1^3|2^t-5|dt\\&=\int_1^{\log_2 5}(-2^t+5)dt+\int_{\log_2 5}^3(2^t-5)dt\\&=\left[-\frac{2^t}{\ln2}+5t\right]_1^{\log_2 5}+\left[\frac{2^t}{\ln2}-5t\right]_{\log_2 5}^3\\&=\left(-\frac{3}{\ln2}+5\log_2 5-5\right)+\left(\frac{3}{\ln2}+5\log_2 5-15\right)\\&=10\log_2 5-20\end{aligned}$$

따라서 $m=10\log_2 5-20=\log_2\left(\frac{5}{4}\right)^{10}$이므로

$$2^m=2^{\log_2\left(\frac{5}{4}\right)^{10}}=\left(\frac{5}{4}\right)^{10}$$

21. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 접선의 개수를 추론한다.

점 $(a,0)$에서 그은 접선이 곡선 $y=(x-n)e^x$과 만나는 점의 좌표를 $(t,(t-n)e^t)$라 하자.
$y'=e^x+(x-n)e^x=(x-n+1)e^x$이므로 점 $(t,(t-n)e^t)$에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식은
$y=(t-n+1)e^t(x-t)+(t-n)e^t$
이 직선이 점 $(a,0)$을 지나므로
$0=(t-n+1)e^t(a-t)+(t-n)e^t$
$t^2-(n+a)t+an+n-a=0$
이 방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(n+a)^2-4(an+n-a)=(n-a)(n-a-4)$

ㄱ. $a=0$일 때 $n=4$이면 $D=0$이므로 점 $(0,0)$에서 곡선 $y=(x-4)e^x$에 그은 접선의 개수는 1이다.
따라서 $f(4)=1$ (참)

ㄴ. $D=(n-a)(n-a-4)=0$에서
$n=a$ 또는 $n=a+4$이므로
$f(n)=1$인 정수 n의 개수는 항상 2이다. (거짓)

ㄷ. 정수 a에 대하여 $f(n)$은

$$f(n)=\begin{cases}0 & (a<n<a+4)\\ 1 & (n=a \text{ 또는 } n=a+4)\\ 2 & (n<a \text{ 또는 } n>a+4)\end{cases}$$

이므로 $f(n)$이 가질 수 있는 값은 0, 1, 2뿐이다.
이때 $\sum_{n=1}^{5}f(n)=5$이므로 가능한 경우는 다음과 같다.
(i) $f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=1$, $f(4)=2$, $f(5)=2$ 인 경우는 $3=a+4$, $a=-1$
(ii) $f(1)=2$, $f(2)=2$, $f(3)=1$, $f(4)=0$, $f(5)=0$ 인 경우는 $3=a$, $a=3$
따라서 $a=-1$ 또는 $a=3$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

22. [출제의도] 중복조합을 계산한다.

${}_7\mathrm{H}_3={}_{7+3-1}\mathrm{C}_3={}_9\mathrm{C}_3=84$

23. [출제의도] 삼각함수에서 미분계수를 계산한다.

$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$에서
$f'(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2$$

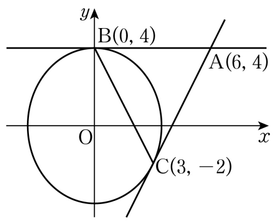
24. [출제의도] 이항분포를 따르는 확률변수의 평균과 분산을 이해한다.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로
$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2n}{9}$이고 $\mathrm{V}(2X-1)=80$이므로
$\mathrm{V}(2X-1)=4\times\frac{2n}{9}=80$, 즉 $n=90$
따라서 $\mathrm{E}(2X-1)=2\mathrm{E}(X)-1$

$$=2\times90\times\frac{1}{3}-1=59$$

25. [출제의도] 타원의 접선의 방정식을 이해한다.

접점의 좌표를 (x_1,y_1)이라 하면 접점은 타원 위의 점이므로 $\frac{x_1^2}{12}+\frac{y_1^2}{16}=1$ …… ㉠
접점 (x_1,y_1)에서의 접선의 방정식은
$\frac{x_1x}{12}+\frac{y_1y}{16}=1$
이 접선이 점 $(6,4)$를 지나므로 $\frac{x_1}{2}+\frac{y_1}{4}=1$에서
$y_1=4-2x_1$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $x_1^2-3x_1=0$, $x_1=0$ 또는 $x_1=3$
이때 두 접점 $(0,4)$, $(3,-2)$를 각각 B, C라 하자.



$\overline{\mathrm{AB}}=6-0=6$ 이고, 직선 AB 는 x 축에 평행하므로 점 C 와 직선 AB 사이의 거리는 $4-(-2)=6$ 이다.

따라서 삼각형 ABC 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times6\times6=18$

26. [출제의도] 모비율의 신뢰구간을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

n 명 중 이 영화를 재관람한 사람의 표본비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 모비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은 $0.0706\le p\le0.1294$ 이므로

$\hat{p}-1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}\times(1-\hat{p})}{n}}=0.0706$ …… ㉠

$\hat{p}+1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}\times(1-\hat{p})}{n}}=0.1294$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 더하면

$2\hat{p}=0.0706+0.1294=0.2$ 이므로

$\hat{p}=0.1$ 을 ㉠에 대입하면

$0.1-1.96\times\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}=0.0706,\ \sqrt{n}=20$

$n=400$ 이고, $\hat{p}=\frac{m}{n}=0.1$ 이므로 $m=40$

따라서 $m+n=440$

27. [출제의도] 원의 접선을 이용하여 평면벡터의 내적에 대한 문제를 해결한다.

선분 AB 의 중점을 O 라 하면 점 Q 가 선분 AB 를 $5:1$ 로 외분하는 점이고, $\overline{\mathrm{BQ}}=\sqrt{3}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OP}}=2\sqrt{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\left(\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)$

$=|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|+\frac{5}{3}\times|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$

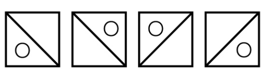
$=2\sqrt{3}\times5\sqrt{3}+\frac{5}{3}\times(2\sqrt{3})^2=50$

28. [출제의도] 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수에 대한 문제를 해결한다.

◇가 그려진 조각으로 채울 정사각형을 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1=4$ 이고,

이 각각에 대하여 ○가 그려진 조각으로 채울 정사각형을 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

택한 정사각형에 ○가 그려진 조각을 채우는 경우는 다음의 4 가지이다.



따라서 ◇가 그려진 조각과 ○가 그려진 조각으로 정사각형을 채우는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times3\times4=48$ …… ㉠

(i) ☆가 그려진 조각으로, ○가 그려진 조각이 채워져 있는 정사각형을 채우는 경우

◎가 그려진 네 개의 조각으로 도형의 남아 있는 부분을 채우는 경우의 수는

2 개의 정사각형 각각에서 2 개의 방법이 있으므로

$2\times2=4$

(ii) ☆가 그려진 조각으로, ○가 그려진 조각이 채워져 있지 않은 정사각형을 채우는 경우

☆가 그려진 조각이 채울 정사각형을 택하는 경우의 수는 2,

택한 정사각형에 ☆가 그려진 조각을 채우는 경우의 수는 4,

◎가 그려진 네 개의 조각으로 도형의 남아 있는 부분을 채우는 경우의 수는 2 이므로

$2\times4\times2=16$

따라서 ☆가 그려진 조각과 ◎가 그려진 조각으로 정사각형을 채우는 경우의 수는 $4+16=20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$48\times20=960$

29. [출제의도] 공간벡터의 성분과 내적을 이용하여 벡터의 크기에 대한 문제를 해결한다.

점 P는 점 A가 중심이고 반지름의 길이가 2인 구 위의 임의의 점이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$

$\le|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=2+|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$가 최대일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$도 최대가 되므로 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$는 평행하다.

점 Q의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면 원점 O에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ \sqrt{3},\ 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(x-3,\ y,\ z)$ 이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|^2=(x-3)^2+y^2+z^2=12$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=(1,\ \sqrt{3},\ 0)\cdot(x-3,\ y,\ z)$

$=(x-3)+\sqrt{3}y+0=6$

따라서 점 Q 는 구 $(x-3)^2+y^2+z^2=12$ 와 평면 $x+\sqrt{3}y-9=0$ 이 만나서 생기는 원 위의 점이다. 이 원을 C, 원 C의 중심을 D 라 하자.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ 가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|\cos\theta$에서

$6=2\times2\sqrt{3}\times\cos\theta$

이므로 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이고 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 이다.

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ 는 평면 $x+\sqrt{3}y-9=0$ 의 법선벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ 와 평행하고 $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|\cos\theta=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(\frac{3}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$,

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\left(\frac{9}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$

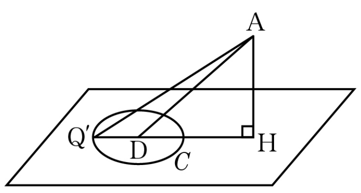
점 A 에서 평면 $x+\sqrt{3}y-9=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\frac{|-1+0-9|}{\sqrt{1+3}}=5$ 이고,

$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{HQ}}|^2=25+|\overrightarrow{\mathrm{HQ}}|^2$ 이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{HQ}}|$ 가 최대일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$ 도 최대가 된다.

$|\overrightarrow{\mathrm{HQ}}|$ 가 최대인 경우는 직선 HQ 가 원 C의 중심 D 를 지날 때이고 이때 점 Q 의 위치를 Q′이라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{HQ'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{HD}}|+|\overrightarrow{\mathrm{DQ'}}|$



$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\left(\frac{11}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2},\ -6\right)$에서

$|\overrightarrow{\mathrm{HD}}|=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2}=\sqrt{73-25}=4\sqrt{3}$ 이고,

$|\overrightarrow{\mathrm{DQ'}}|$ 은 원 C의 반지름의 길이 $\sqrt{3}$ 과 같으므로

$|\overrightarrow{\mathrm{HQ'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{HD}}|+|\overrightarrow{\mathrm{DQ'}}|=4\sqrt{3}+\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AQ'}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{HQ'}}|^2=25+75=100$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$ 의 최댓값은 10 이고,

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ 의 최댓값은 12 이다.

30. [출제의도] 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 정적분에 대한 문제를 해결한다.

(나)에서 $x=0$ 일 때 $g(1)=0$

$g(x+1)=\int_0^x\{f(t+1)e^t-f(t)e^t+g(t)\}dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하여 정리하면

$f(x+1)-f(x)=\{g'(x+1)-g(x)\}e^{-x}$

임의의 실수 t 에 대하여

$\int_0^t\{f(x+1)-f(x)\}dx=\int_0^t\{g'(x+1)-g(x)\}e^{-x}dx$

(좌변)$=\int_0^t f(x+1)dx-\int_0^t f(x)dx$

$=\int_1^{t+1}f(x)dx-\int_0^t f(x)dx$

$=\int_t^{t+1}f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx$ …… ㉠

(우변)$=\int_0^t\{g'(x+1)-g(x)\}e^{-x}dx$

$=\int_0^t g'(x+1)e^{-x}dx-\int_0^t g(x)e^{-x}dx$

$\int_0^t g'(x+1)e^{-x}dx$ 에서

$\int_0^t g'(x+1)e^{-x}dx=\Big[g(x+1)e^{-x}\Big]_0^t+\int_0^t g(x+1)e^{-x}dx$

(우변)$=\Big[g(x+1)e^{-x}\Big]_0^t+\int_0^t\{g(x+1)-g(x)\}e^{-x}dx$

$=g(t+1)e^{-t}-g(1)-\int_0^t\pi(e+1)\sin(\pi x)dx$

$=g(t+1)e^{-t}+\Big[(e+1)\cos(\pi x)\Big]_0^t$

$=g(t+1)e^{-t}+(e+1)\cos(\pi t)-(e+1)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\int_t^{t+1}f(x)dx$

$=\int_0^1 f(x)dx+g(t+1)e^{-t}+(e+1)\cos(\pi t)-(e+1)$

$g(x+1)=g(x)-\pi(e+1)\sin(\pi x)e^x$ 에서

$g(0)=g(1)=g(2)=\ \cdots\ =g(9)=0$

$\int_1^{10}f(x)dx=\sum_{n=1}^{9}\int_n^{n+1}f(x)dx$

$=\sum_{n=1}^{9}\left\{\int_0^1 f(x)dx+g(n+1)e^{-n}+(e+1)\cos(\pi n)-(e+1)\right\}$

$=9\int_0^1 f(x)dx+0+(e+1)\sum_{n=1}^{9}\{\cos(\pi n)-1\}$

$=9\left(\frac{10}{9}e+4\right)+(e+1)\times(-10)=26$